

Title	無限聯立一次方程式ニツイテ（Ⅱ）
Author(s)	花井, 七郎
Citation	全国紙上数学談話会. 2(13) p.445-p.449
Issue Date	1949-01-15
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/75268">https://doi.org/10.18910/75268</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

# 134. 無限聯立一次方程式ニツイテ(II)

京都工專 花井七郎 (12. 1)

L. Kantorovitch<sup>1)</sup>ニ從ツテ、線状座標空間ニ *semi-order* ヲ定義シテ、*order topology* ヲ導入シ、コレニヨツテ線状座標空間ニ於テ定義サレタ無限聯立一次方程式ガ解ヲ有スルタメノ條件ヲ求メテ見ル。

線状座標空間入ノ任意ノ点  $p = (x_1, x_2, \dots)$  ノ座標  $x_i$  ハスベテ實數トスル。入ノ二点  $p = (x_1, x_2, \dots)$ ,  $q = (y_1, y_2, \dots)$  ニ於テ  $x_i \geq y_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) ガ成立スルトキ  $p \geq q$  ト定義スル。等号ハ  $x_i = y_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) ノトキトスル。  $p_+ = \sup(0, p)$ ,  $p_- = \sup(0, -p)$ ,  $|p| = p_+ + p_-$  トスルトキ、 $p_+$ ,  $p_-$ ,  $|p|$  ガ又空間入ノ点トナルトハ限ラナイ。從ツテ空間入ガ *vector* 束トナルトハ限ラナイ。コレニ關シテ次ノコトガ成立スル。

【助定理】 1. 入ガ *vollkommen* デ且ツ局所弱 コンパクト デアルトキハ、入ハ完備ナ *vector* 束トナリ、且ツ弱收斂ト(0)收斂トハ一致スル。

【証明】 入ガ *vollkommen* デアルカラ、從ツテ *normal* デアル。

ソコデ入ガ *normal* デアルコトヲ用ヒレバ、入ガ完備ナ *vector* 束デアルコトガ容易ニ導カレル。次ニ、入ガ *vollkommen* デ且ツ局所弱 コンパクト デアルカラ、点列  $\{p^{(n)}\}$  ガ座標的ニ一点  $p$  ニ收斂スルコトト、

$\therefore p^{(n)} \rightarrow p$  (弱) トハ一致スル。<sup>2)</sup> 然ルニ  $p^{(n)} \rightarrow p(0)$  ト  $p^{(n)}$  ガ座標的ニ  $p$  ニ收斂スルコトハ同値デアル。ヨツテ  $p^{(n)} \rightarrow p(弱)$  ト  $p^{(n)} \rightarrow p(0)$  トハ一致スル。  
以上

今元素ガスベテ實數デアル無限行列ヲ

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

トシ、入ノ任意ノ点  $p = (x_1, x_2, \dots)$  ニ對シテ常ニ  $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) ハ絶対收斂シ且ツ  $(y_1, y_2, \dots)$  ガ又入ノ点デアルトスル。カセウナ無限行列ノスベテヨリナル集合ヲ  $\Sigma(a)$  ニ表ハスコトハスル。  $\Sigma(a) =$  居スル任意ノ行列ハ入ノ任意ノ点ヲ入内ニ移ス弱連續ナ加法的作用ヲアツテ、特

ニ入ガ *vollkommen* デアルトキハ  $\Sigma(\lambda)$  ハーツノ *Ring* ニナルコトガ G. Köthe, O. Toeplitz<sup>2)</sup> ニヨツテ証明サレテキル。從ツテ [助定理] 1 ヨリ直チニ次ノ助定理が成立スル。

[助定理] 2.  $\lambda$  ガ *vollkommen* デ且ツ局所弱 コンパクト デアルトキハ  $\Sigma(\lambda)$  ニ属スル任意ノ行列ハ入ヲ入内ニ移入 (0) 連続ナ加法的作用素デアツテ、而モ  $\Sigma(\lambda)$  ハーツノ *Ring* トナル。

以上ヲ準備トシテ次ニ無限聯立一次方程式ニツイテ考ヘテ見ル。

[定理] 1.  $\lambda$  ハ *vollkommen* デ且ツ局所弱 コンパクト トスル。無限行列  $\alpha = (\alpha_{ik})$ ,  $\alpha_{ik} \geq 0$  ( $i, k = 1, 2, \dots$ ) ガ  $\Sigma(\lambda)$  ニ属スルトスル。方程式  $\beta = \alpha \beta + \beta_0$ ,  $\beta_0 \geq 0$  ( $\beta_0$  ハ既知) ガ解  $\beta^* \geq 0$  ヲ有スルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ、任意ノ  $n$  ニ對ンテ

$$(\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + E) \beta_0 < \beta'$$

ガ成立スル如キ  $\beta' \in \lambda$  ガ存在スルコトデアル。但シ  $E$  ハ単位行列トスル。

[証明] 十分ナルコト 今  $V(\beta) = \alpha \beta + \beta_0$  トスレバ  $V(0) = \beta_0$ 。

從ツテ  $0 \leq V(0) = \beta_0$ 。然ルニ  $\alpha_{ik} \geq 0$  デアルカラ  $V(\beta)$  ハ單調増加ナ作用素デアル。

$$\therefore V(0) \leq V(\beta_0) = (\alpha + E) \beta_0$$

同様ニシテ

$$\beta_0 \leq (\alpha + E) \beta_0 \leq (\alpha^2 + \alpha + E) \beta_0 \leq \dots < \beta'$$

然ルニ [助定理] 1 ニヨツテ  $\lambda$  ハ完備ナ *vector* 束デアルカラ 今

$(\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + E) \beta_0 = \beta_n$  トスレバ、 $\beta_n \rightarrow \beta^*(0)$  ナル  $\beta^* \in \lambda$  ガ存在スル。一方  $\beta_n = V(\beta_{n-1})$  ガ成立スル。

然ルニ  $\alpha \in \Sigma(\lambda)$  デアルカラ [助定理] 2 ニヨリ  $V(\beta)$  ハ (0) 連続デアル。從ツテ  $n \rightarrow \infty$  トキハ  $\beta_n = V(\beta_{n-1})$  ヨリ

$$\beta^* = V(\beta^*) = \alpha \beta^* + \beta_0.$$

必要ナルコト.  $\beta^* \geq 0$  ナル解が存在シタトスレバ

$$\beta^* = \alpha \beta^* + \beta_0$$

從ツテ

$$\alpha \beta^* = \alpha^2 \beta^* + \alpha \beta_0$$

$$\therefore \mathcal{B}^* = \alpha' \mathcal{B}^* + (\alpha + \epsilon) \mathcal{B}_0$$

$$\text{一般} = \mathcal{B}^* = \alpha^{nH} \mathcal{B}^* + (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + \epsilon) \mathcal{B}_0.$$

然ルニ  $\alpha^{nH}$  ノ元素ハ  $\geq 0$ , 且ツ  $\mathcal{B}^* \geq 0$  デアルカラ, 任意ノ  $n = \text{對シテ}$

$$\mathcal{B}^* \geq (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + \epsilon) \mathcal{B}_0 \quad \text{【以上】}$$

從ツテ若シ任意ノ  $\mathcal{B}_0 \geq 0$  = 對シテ  $\mathcal{B}'$  が存在シテ

$$(\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + \epsilon) \mathcal{B}_0 < \mathcal{B}' \quad (n=1, 2, \dots)$$

が成立スルトキハ, 任意ノ  $\mathcal{B}_0 \in \lambda$ ,  $\mathcal{B}_0 \geq 0$  = 對シテ

$$\mathcal{B} = \alpha \mathcal{B} + \mathcal{B}_0 \quad \text{即チ} \quad (E - \alpha) \mathcal{B} = \mathcal{B}_0$$

ハ常ニ解  $\mathcal{B}^* \geq 0$  ヲ有スル. ソコデ問題ニナルノハ  $E - \alpha$  ノ逆行列が存在シテ

$\Sigma(\lambda)$ ニ属スルタメノ條件ハ何かト云フコトデアル. コレニ關シテ次ノ定理ヲ得

ル.

【定理】 2.  $\lambda$ ハ *vollkommen* デ且ツ局所弱コンパクトデアルトスル.

行列  $\alpha = (\alpha_{ik})$ ,  $\alpha_{ik} \geq 0$  ( $i, k = 1, 2, \dots$ ) ハ  $\Sigma(\lambda)$ ニ属スルトシ.

$X$ ヲ  $\lambda$ ノ任意ノ *beschränkt* ナ集合トスル. (*Köthe, Toeplitz*ノ意味

デ)  $S_n = \alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + E$  トスルトキ,  $S_n \mathcal{B}$  ガ  $X$ ニ於テ一様ニ

$S_\infty \mathcal{B}$ ニ弱收斂スルトキハ (即チ任意ノ  $\check{\alpha} \in \lambda^*$ , 任意ノ正数  $\epsilon > 0$  = 對

シテ  $n_1(\check{\alpha}, \epsilon, X)$ ガ定マリ,  $n \geq n_1(\check{\alpha}, \epsilon, X)$ ナルスベテノ  $n$ , 任意ノ

$\mathcal{B} \in X$ ニ對シテ  $|\check{\alpha} \cdot (S_n - S_\infty) \mathcal{B}| < \epsilon$ ガ成立スル),  $E - \alpha$ ノ逆行列

が存在シテ  $\Sigma(\lambda)$ ニ属スル.

【証明】  $S_n \mathcal{B}$ ハ  $\lambda$ ノ任意ノ *beschränkt* ナ集合ニ於テ一様ニ  $S_\infty \mathcal{B}$ ニ

弱收斂スル故ニ, 特ニ  $X$ トシテ任意ノ  $\mathcal{B}' \geq 0$ ,  $\mathcal{B}' \in \lambda$ ナル一点  $\mathcal{B}'$ ノミヨ

リナル集合トスレバ 【助定理】 1ニヨリ入デハ (0) 收斂ト弱收斂ト一致ス

ルカラ, 【定理】 1ノ証明中ヨリ  $\mathcal{B} = \alpha \mathcal{B} + \mathcal{B}'$ ガ解ヲ有スルコトガ分リ,

從ツテ *Kantorovitch*ノ定理<sup>4)</sup>ニヨツテ, 任意ノ  $\mathcal{B}_0 \in \lambda$ ニ對シテ

$$\mathcal{B} = \alpha \mathcal{B} + \mathcal{B}_0$$

ハ解  $\mathcal{B}_0^*$ ヲ有シ且ツ

$$\mathcal{B}_0^* = (0)\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + E) \mathcal{B}_0.$$

然ルニ  $\lambda$ デハ弱收斂ト (0) 收斂トハ一致スルカラ,

$$S_{\infty} p_0 = p_0^*$$

従ツテ  $S_{\infty} p_0 = \alpha S_{\infty} p_0 + p_0$

$$\therefore (E - \alpha) S_{\infty} p_0 = p_0 \dots\dots\dots (1)$$

$S_n$  は  $\Sigma(\lambda)$  に属スルカラ、弱連続デアル。従ツテ任意ノ  $\check{u} \in \lambda^* =$  對シテ、  
 $p^{(m)} \rightarrow p$  (弱) ノトキハ  $|\check{u} \cdot S_n(p^{(m)} - p)| \rightarrow 0$  ( $m \rightarrow \infty$ )。又  
 $S_n p \rightarrow S_{\infty} p$  (弱) デアルカラ  $|\check{u} \cdot (S_n - S_{\infty}) p| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )。而シ  
テ  $p^{(m)} \rightarrow p$  (弱) デアルカラ、 $\{p^{(m)}\}$  ハ *beschränkt* デアル。依ツ  
テ仮定ニヨツテ、 $S_n p^{(m)}$  ハ  $\{p^{(m)}\}$  ニ於テ一様ニ  $S_{\infty} p^{(m)}$  ニ弱收斂スル。  
従ツテ不等式

$$|\check{u} \cdot S_{\infty} (p^{(m)} - p)| \leq |\check{u} \cdot (S_n - S_{\infty}) p| + |\check{u} \cdot S_n (p^{(m)} - p)| \\ + |\check{u} \cdot (S_n - S_{\infty}) p^{(m)}|$$

ヨリ、 $m \rightarrow \infty$  ノトキハ  $S_{\infty} p^{(m)} \rightarrow S_{\infty} p$  (弱) デ出テ來ル。

故ニ  $S_{\infty}$  ハ  $\lambda$  全体ヲ入内ヘ移ス弱連続作用素デアツテ、明ニ  $S_{\infty}$  ハ加法的  
デアル。

従ツテ Köthe, Toeplitz ノ定理<sup>5)</sup>ニヨツテ  $S_{\infty}$  ハ  $\Sigma(\lambda)$  に属スル。

(1)ニテ  $p_0$  ハ  $\lambda$  ノ任意ノ点デアルカラ、

$$(E - \alpha) S_{\infty} = E$$

他方  $S_n \alpha = S_{n+1} - E$  デアルカラ、任意ノ  $p \in \lambda =$  對  
シテ

$$S_n \alpha p = S_{n+1} p - p$$

依ツテ  $n \rightarrow \infty$  ノトキハ

$$S_{\infty} \alpha p = S_{\infty} p - p.$$

$$S_{\infty} (E - \alpha) = E$$

故ニ  $S_{\infty}$  ハ  $E - \alpha$  ノ逆行列デアル。而シテ  $S_{\infty} = E + \alpha + \alpha^2 + \dots$  ガ成立スル  
コトハ仮定カラ明カデアル。 [以上]

[注意] Hilbert 空間  $\ell^{(2)}$  ニ於ケル有界線型作用素  $A$  ハ無限行列ヲ表ハサレ、 $A$   
ノ *norm*  $\|A\| < 1$  ナルトキハ  $E - A$  ノ逆行列 (有界) ガ存在シテ  $(E - A)^{-1} =$   
 $E + A + A^2 + \dots$  トナルコトハヨク知ラレテアルノデアル。

〔定理〕2ハ此場合特ニ無限行列 $A$ ノ各元素ガ $\geq 0$ デアリ。且ツ実数座標ノ  
*Hilbert* 空間ノ場合ノーツノ擴張ニナツテキル。

---

- 1) *L. Kantorovitch; Acta Math. vol. 71 (1939) p. 63-97*
- 2) *G. Köthe, Math. Ann. vol. 114 (1937), p. 99-125.*
- 3) *G. Köthe, O. Toeplitz, Journ. für Math. vol 171 (1934), p. 193-216*
- 4) 前記 1) ノ論文
- 5) 前記 3) ノ論文